

مبادئ الاحصاء والاحتمالات

Principle of Statistic and Probability

MS 304

محاضرة رقم 9

طرق حساب الاحتمالات

يعتمد حساب الاحتمال من الناحية النظرية على أسس وقواعد الرياضيات، ويعتبر هذا النوع من الاحتمال هو العنصر الأساسي في الاستدلال الإحصائي، ولكن في المجال التجريبي تعتمد الاحتمالات على النتائج الفعلية لمشاهدات التجربة، وعلى تكرار الحادث محل الاهتمام، فإذا رمزنا لاحتمال وقوع الحادث A بالرمز $P(A)$ ، فإن طريقة حساب هذا الاحتمال تتحدد وفقاً لنوع الاحتمال، وهما نوعان:

- الاحتمال التجريبي Empirical probability
- الاحتمال النظري Theoretical Probability

- الاحتمال التجريبي Empirical probability: ويعبر عنه بالتكرار النسبي، ويحسب بتطبيق المعادلة التالية:

$$P(A) = \frac{f(A)}{n}$$

حيث أن: n هو مجموع التكرارات (العدد الكلي للملاحظات)، $f(A)$: هو تكرار الحادث

فإذا تم إلقاء قطعة عملة غير متحيزة 500 مرة، وتم ملاحظة عدد مرات ظهور كل وجه،
ولخصت كالتالي:

الوجه (<i>Face</i>)	<i>H</i>	<i>T</i>	<i>SUM</i>
عدد مرات ظهور الوجه	260	240	500

وإذا كان المطلوب حساب احتمال ظهور الصورة *H*، يمكن تطبيق المعادلة رقم (7-1)، والتي
تعتمد على التكرار النسبي، أي أن :

$$P(H) = \frac{f(H)}{n} = \frac{260}{500} = 0.52$$

- الاحتمال النظري Theoretical Probability: وهو الذي يعتمد في حسابه على أسس وقواعد الرياضيات، والتي تستخدم في تحديد عدد النتائج الممكنة للتجربة، وعدد النتائج الممكنة لوقوع الحادث، ومن ثم يحسب هذا النوع من الاحتمال ، بتطبيق المعادلة التالية:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

حيث أن: $n(S)$ هو عدد النتائج الممكنة للتجربة، $n(A)$ هو عدد النتائج الممكنة لوقوع الحادث A ، فعند إلقاء قطعة عملة غير متحيزة مرة واحدة ، نجد أن فراغ العينة هو: $S: \{H, T\}$

، أي أن عدد النتائج الممكنة هي: $n(S) = 2^1 = 2$ ، وإذا كان الحادث A هو ظهور صورة ،

نجد أن $A: \{H\}$ ، أي أن عدد النتائج المكونة للحادث A هي: $n(A) = 1$ ، ويكون احتمال وقوع

الحادث A هو:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{2} = 0.5$$

• النتائج المتشابهة: إذا أجريت تجربة، وكانت كل نتيجة من النتائج الممكنة للتجربة لها نفس

الفرصة في الظهور، بمعنى أن كل نتيجة لها احتمال هو $(1/n(S))$ ، تسمى هذه النتائج بالنتائج

المتماثلة أو المتشابهة، فعند إلقاء زهرة نرد متزنة مرة واحدة، نجد أن فراغ العينة هو

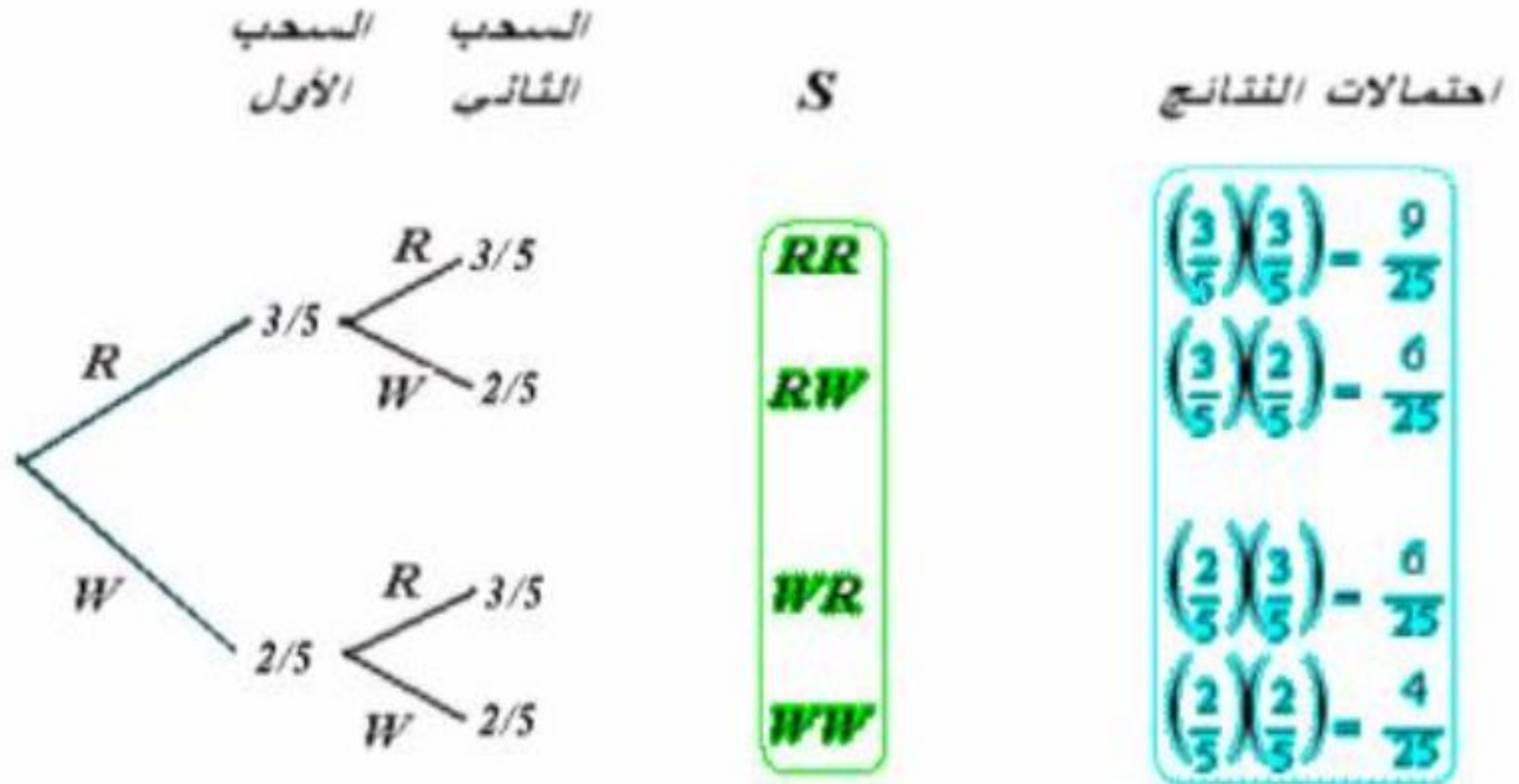
$S: \{1,2,3,4,5,6\}$ ، واحتمال كل نتيجة هو $(1/6)$ ، وعند إلقاء الزهرة مرتين نجد أن عدد

نتائج فراغ العينة هو: $n(S)=6^2=36$ نتيجة، وهي:

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

وهذه النتائج متماثلة، واحتمال كل نتيجة هو $(1/36)$.

- النتائج غير المتماثلة: هي النتائج التي تحدث عند تكرار محاولة، بحيث أن احتمالات نتائج كل محاولة غير متساوي، ومن ثم لا تتساوى احتمالات نتائج التجربة، فعند سحب كرتين مع الإرجاع بطريقة عشوائية من كيس به ثلاث كرات حمراء (R)، وكرتان تحملان اللون الأبيض (W)، نجد أنه في كل سحب يكون احتمال ظهور كرة حمراء هو $3/5$ ، واحتمال ظهور كرة بيضاء هو $2/5$ ، ومن ثم يكون نتائج فراغ العينة، واحتمال كل نتيجة في حالة سحب كرتين هو:



يلاحظ أن احتمال كل نتيجة يختلف عن $(1/4)$ ، فهذه الحالات غير متزنة.

قوانين الاحتمالات Probability Laws

هناك بعض القوانين التي يمكن تطبيقها لحساب الاحتمالات المختلفة، وهي:

• قانون جمع الاحتمالات Addition Law

إذا كان لدينا الحادثن A , B ، فإن الاحتمال $P(A \cup B)$ ، يمكن استنتاج معادلته كما يلي:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= \frac{n(A \cup B)}{n(S)} \\ &= \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(S)} \\ &= \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)} \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

إذا:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

وفي حالة ثلاث أحداث A , B , C ، يمكن استنتاج معادلة الاتحاد $P(A \cup B \cup C)$ ، وهي:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) \\ - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

وعندما تكون الأحداث متنافية، فإن احتمالات التقاطعات تساوي أصفار، ويكون:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{ ,}$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

بديهيات الاحتمال

إذا كان S فضاء العينة لكل حادثة A فإن:

$$p_1 : 0 \leq p(A) \leq 1$$

$$p_2 : p(S) = 1$$

$$p_3 : p(A \cup B) = p(A) + p(B) \quad \text{A, B منفصلان}$$

مثال

أفرض أن A و B حادثتان بحيث أن

$$P(A) = \frac{3}{8}; P(B) = \frac{1}{2}; P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

Find

$$(1): P(A \cup B); (2): P(A^c); (3): P(B^c)$$

$$(4): P(A^c \cup B^c); (5): P(A \cap B^c); (6): P(A^c \cap B)$$

$$(1) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}.$$

$$(2) P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}.$$

$$(3) P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$(4) P(A^c \cap B^c) = P(A \cup B)^c = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}.$$

$$(5) P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

$$(6) P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

مثال

عند إلقاء زهرة نرد غير متحيزة مرتين، فأوجد ما يلي:

- 1- احتمال ظهور وجهين متشابهين.
- 2- احتمال ظهور وجهين مجموع نقاطهما 10.
- 3- احتمال ظهور وجهين متشابهين أو مجموع نقاطهما 10.
- 4- احتمال ظهور وجهين مجموع نقاطهما 7 أو 10.

الحل:

نتائج فراع العينة هي:

	S					
	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$$n(S)=36$$

1- بفرض أن الحادث A هو حادث ظهور وجهين متشابهين، فإن:

$$A: \{(1,1) (2,2) (3,3) (4,4) (5,5) (6,6)\}, n(A)=6$$

ويكون احتمال ظهور وجهين متشابهين هو:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

2- بفرض أن الحادث B هو حادث ظهور وجهين مجموع نقطتهما 10، فإن:

$$B: \{(4,6) (5,5) (6,4)\}, n(B)=3$$

ويكون احتمال ظهور وجهين متشابهين هو :

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

3- لحساب احتمال ظهور وجهين متشابهين أو (or) مجموع نقطتهما 10 ، تستخدم المعادلة

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

حيث أن:

$$P(A) = \frac{1}{6} , P(B) = \frac{1}{12}$$

وأما التقاطع $(A \cap B)$ فيعبر عن ظهور وجهين متشابهين و مجموعهما 10 يمكن حسابه كما يلي:

$$(A \cap B) : \{(5,5)\} , n(A \cap B) = 1$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{36}$$

ومن ثم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

4- بفرض أن الحادث C هو حادث ظهور وجهين مجموع نقاطهما 10 ، نجد أن:
ظهور وجهين مجموع نقاطهما 7 ، والحادث B هو حادث

$$B: \{(4,6) (5,5) (6,4)\} , C: \{(1,6) (2,5) (3,4) (4,3) (5,2) (6,1)\}$$

$$n(B)=3$$

$$n(C)=6$$

$$P(B) = 3/36$$

$$P(C) = 6/36$$

يلاحظ أن الحادثين C, B حادثين متنافيين، لذا تستخدم المعادلة (5-7) في حساب الاحتمال المطلوب كما يلي:

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{3}{36} + \frac{6}{36}$$

$$= \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$