

مبادئ الاحصاء والاحتمالات

Principle of Statistic and Probability

MS 304

محاضرة رقم 2

مقاييس النزعة المركزية (المتوسطات)

يمكن تعريف المتوسطات بأنها القيمة النموذجية الممثلة لمجموعة من البيانات وحيث أن القيمة النموذجية تميل إلى الوقوع في المركز لذلك فإنه يمكن أن تسمى المتوسطات بمقاييس النزعة المركزية .

وبعض المتوسطات الأكثر شيوعاً هي الوسط الحسابي (أو المتوسط) mean والوسيط median والمعدل mode وهناك أيضاً الوسط الهندسي والوسط التوافقي وذلك في حالة البيانات المباشرة والمئوية.

تعريف رمز المجموع Σ

إذا كان لدينا مجموعة من المشاهدات

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

فإن حاصل جمع هذه المشاهدات يعبر عنه بالمجموع

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + \dots + x_n$$

الوسط الحسابي أو المتوسط (mean)

يعتبر من أهم مقاييس الموضع (النزعة المركزية) والأكثر استخداماً في

الإحصاء . إذا كان لدينا مجموعة من المشاهدات للمتغير X

وهي $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ فإن الوسط الحسابي يساوي حاصل جمع

المشاهدات مقسوماً على عددها ويرمز له بالرمز \bar{x} .

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

مثال 1

إذا كانت درجات 5 طلاب في إحدى المواد هي 60, 72, 40, 80, 63 ، احسب المتوسط ؟

الحل :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i$$

$$= \frac{1}{5} (60 + 72 + 40 + 80 + 63) = \frac{1}{5} (315) = 63$$

الوسط الحسابي للبيانات المبوبة

إذا كان لدينا عدد K من الفئات ذات المراكز $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ لها تكرارات f_1, f_2, \dots, f_k على الترتيب فإن الوسط الحسابي يعطي بالعلاقة الآتية

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + \dots + x_k f_k}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^k x_i f_i}{\sum_{i=1}^k f_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i f_i$$

$$n = \sum_{i=1}^k f_i \text{ حيث}$$

مثال 2

احسب متوسط أعمار الطلاب \bar{X} للبيانات الآتية

فئات الأعمار	5 – 6	7 – 8	9 – 10	11 – 12	13 – 14
عدد الطلاب	2	5	8	4	1

الحل : لسهولة الحل نكوّن الجدول الآتي

الفئات	مركز الفئات X	التكرار f	$f.X$
5 – 6	5.5	2	11
7 – 8	7.5	5	37.5
9 – 10	9.5	8	76.0
11 – 12	11.5	4	46.0
13 – 14	13.5	1	13.5
\sum المجموع		$n = \sum f_i = 20$	$\sum f_i x_i = 184$

بالتعويض في قانون الوسط الحسابي نحصل على

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i f_i = \frac{1}{20} (184) = 9.2$$

خواص المتوسط

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^n d_i = 0 \quad (i)$$

أي أن المجموع الجبري لانحرافات القيم عن وسطها الحسابي يساوي صفر

$$\overline{(ax \pm b)} = a\bar{x} \pm b \quad (ii)$$

(iii) مميزات المتوسط :

(١) مقياس سهل حسابه ويخضع للعمليات الجبرية بسهولة .

(٢) يأخذ في الاعتبار جميع القيم محل الدراسة .

(٣) أكثر المقاييس فهماً في الإحصاء .

(iv) عيوب المتوسط

(١) يتأثر بالقيم المتطرفة (الكبيرة جداً والصغيرة جداً)

(٢) يصعب حسابه في حالة البيانات الوصفية

الوسيط Median

عند ترتيب البيانات ترتيباً تصاعدياً – أو تنازلياً – فالوسيط يكون هو القيمة التي يقع 50% من البيانات قبلها في الترتيب و 50 % من البيانات بعدها في الترتيب. فإذا كان عدد البيانات فردياً يكون الوسيط هو المشاهدة التي في المنتصف وإذا كان عدد البيانات زوجياً فإن الوسيط هو متوسط المشاهدين التين في المنتصف.

مثال 3

أوجد الوسيط لدرجات الطلاب الآتية

60,72,40,80,63

الحل :

نرتب البيانات تصاعدياً : 40,60,63,72,80

وبما أن عدد المشاهدات – البيانات – فردي فإن الوسيط هو المشاهدة التي تقع في المنتصف

$$\text{med} = 63$$

مثال 4

أوجد الوسيط لدرجات الطلاب الآتية :

72,60,72,40,80,63

الحل :

نرتب البيانات تصاعدياً : 40,60, $\boxed{63}$, $\boxed{72}$,72,80

بما أن عدد البيانات زوجي فإن الوسيط هو $med = \frac{63 + 72}{2} = 67.5$

الوسيط من الجداول التكرارية

الفئة الوسطية هي الفئة التي يقع فيها الوسيط .

لإيجاد الوسيط حسابياً نتبع الخطوات الآتية :

(١) نكون الجدول المتجمع الصاعد (باستخدام الحدود الحقيقية)

(٢) نوجد رتبة الوسيط $\frac{n}{2}$ (سواء كانت n فردية أو زوجية)

(٣) نحدد مكان الوسيط بعد حساب $\frac{n}{2}$ بين التكرارات المتجمعة في الجدول

المتجمع الصاعد و نضع خطاً أفقياً يمر داخل الفئة الوسيطة و يكون

التكرار المتجمع السابق لهذا الخط هو f_1 والتكرار المتجمع اللاحق هو

f_2 .

(٤) نحدد البداية الحقيقية للفئة الوسيطة و يرمز لها L .

(٥) نعيّن طول الفئة الوسيطة h ويساوى الحد الأدنى للفئة التالية مطروحاً منه الحد الأدنى للفئة الوسيطة .

$$(٦) \text{ يعطي الوسيط بالعلاقة } med = L + \frac{\frac{n}{2} - f_1}{f_2 - f_1} h$$

مثال 5

احسب الوسيط لأعمار الطلاب في مثال 2

فئات الأعمار	5 – 6	7 – 8	9 – 10	11 – 12	13 – 14
عدد الطلاب	2	5	8	4	1

الحل : نكون الجدول التكراري المتجمع الصاعد كالآتي

التكرارات المتجمعة الصاعدة	فئات التكرارات المتجمعة الصاعدة
0	أصغر من 4.5
2	أصغر من 6.5
f_1 7	أصغر من 8.5
<hr/>	
f_2 15	أصغر من 10.5
19	أصغر من 12.5
20	أصغر من 14.5

$$\frac{n}{2} = \frac{20}{2} = 10 \quad \text{نحسب } \frac{n}{2} \text{ وهي تساوي}$$

ونلاحظ أن 10 تقع بين 7 و 15

ونضع خطأً أفقياً يمثل تكرار الوسيط المتجمع 10 و عليه فيكون

$$h = 10.5 - 8.5 = 2$$

$$f_2 = 15$$

$$f_1 = 7$$

$$L = 8.5$$

وبتطبيق قانون الوسيط نحصل على

$$med = L + \frac{\frac{n}{2} - f_1}{f_2 - f_1} h = 8.5 + \frac{10 - 7}{15 - 7} \cdot 2 = 8.5 + \frac{6}{8} = 9.25$$