مبادئ الاحصاء والاحتمالات

Principle of Statistic and Probability

MS 304

محاضرة رقم 12

التوزيعات الاحتمالية المستمرة الخاصة

Continuous Probability Distributions

هناك بعض التوزيعات الاحتمالية المستمرة الخاصة، ولها دوال كثافة احتمال محددة، وفيما يلي بعض هذه التوزيعات:

1 التوزيع المنتظم Uniform distribution

2 التوزيع الأسي السالب Negative Exponential distribution

3 التوزيع الطبيعي The Normal Distribution

التوزيع الطبيعي The Normal Distribution

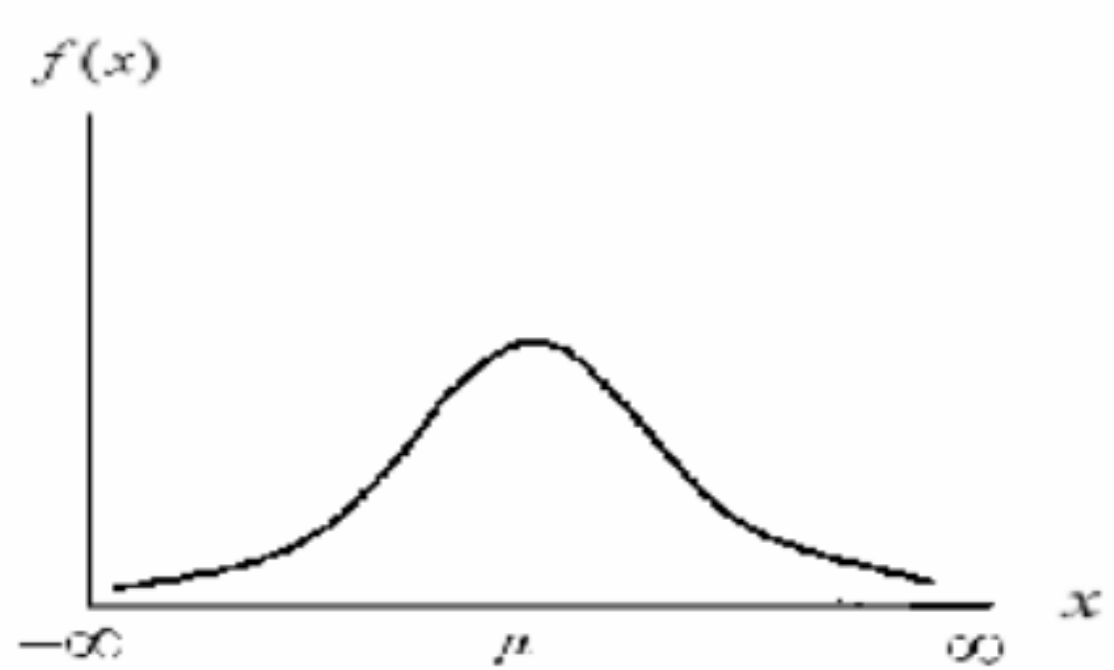
يعتبر هذا التوزيع من أكثر التوزيعات الاحتمالية استخداما في النواحي التطبيقيـــة، ومنـــها الاستدلال الإحصائي شاملا التقدير، واختبارات الفروض، كما أن معظم التوزيعات يمكن تقريبـــها إلى هذا التوزيع.

شكل دالة كثافة الاحتمال $p.d.f$

إذا كان المتغير x متغير عشوائي له توزيع طبيعي ، مداه هو $-\infty < x < \infty$ فإن دالة كثافة احتماله هي:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad , \; -\infty < x < \infty \; , \; \pi = 22/7$$

وهذا التوزيع له منحنى متماثل يأخذ الصورة التالية:



فهذا المنحنى متماثل على جانبي الوسط الحسابي μ .

معالم هذا التوزيع

توجد معلمتين لهذا التوزيع هما :

الوسط الحسابي : $E(x)=\mu$ والتباين : $\mathrm{var}(x)=\sigma^2$

ومن ثم يعبر عن توزيع المتغير x بالرموز : $x \sim N(\mu,\sigma^2)$ ويعني ذلك أن المتغير العشوائي x

يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ ، وتباين σ^2 .

خصائص التوزيع الطبيعي

هذا التوزيع من أكثر التوزيعات الاحتمالية استخداما، بل يشتق منه كل التوزيعات الاحتمالية الأخرى المستخدمة في الاستدلال الإحصائي، ومن خصائص هذا التوزيع ما يلي:

1- الوسط الحسابي μ 2- والتباين σ^2

3- منحني هذا التوزيع متماثل على جانبي الوسط μ

التوقع الرياضي (Mathematical Expectation):

تعريف التوقع الرياضي:

(I) التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المنفصل x الذي دالة كتلته الاحتمالية f(x) هو

$$\mu = E(x) = \sum_{x} x f(x)$$

(II) التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المتصل x الذي دالة كتلته الاحتمالية f(x) هو

$$\mu = E(x) = \int^{\infty} x f(x) dx$$

حيث $E(x)$ هو الوسط المرجح للقيم الممكنة للمتغير العشوائي وفيزيائيا فإن التوقع الرياضي يساوي مركز الثقل.

مثال:

إذا كانت دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي المنفصل X معطاة وفق الجدول التالي :

x_i	1	2	3	4	5	6
$f(x_i)$	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

أوجد التوقع الرياضي لـــلمتغير X

الحـل

$$E(x)=\sum x_i f(x_i)$$

$$=1.\frac{1}{36}+2.\frac{3}{36}+3.\frac{5}{36}+4.\frac{7}{36}+5.\frac{9}{36}+6.\frac{11}{36}$$

$$=\frac{161}{36}=4.47$$

-مثال:

أوجد التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المتصل x الذي دالة كثافته

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi\left(1+x^{2}\right)}, & 0<x<1\\ 0, & \ldots\ldots\ldots\ldots, else\end{cases}$$

الحـل

$$E(x)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)=\int_{0}^{1} x\,.\frac{4}{\pi\left(1+x^{2}\right)}dx$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_{0}^{1}\frac{x}{1+x^{2}}dx=\frac{2}{\pi}In\left(1+x^{2}\right)\Big|_{0}^{1}$$

$$=\frac{2}{\pi}In\left(1+1\right)=\frac{2}{\pi}In2=\frac{In4}{\pi}=0.441$$