

مبادئ الإحصاء والاحتمالات

Principle of Statistic and Probability

MS 304

محاضرة رقم 10

• قانون الاحتمال الشرطي Conditional probability

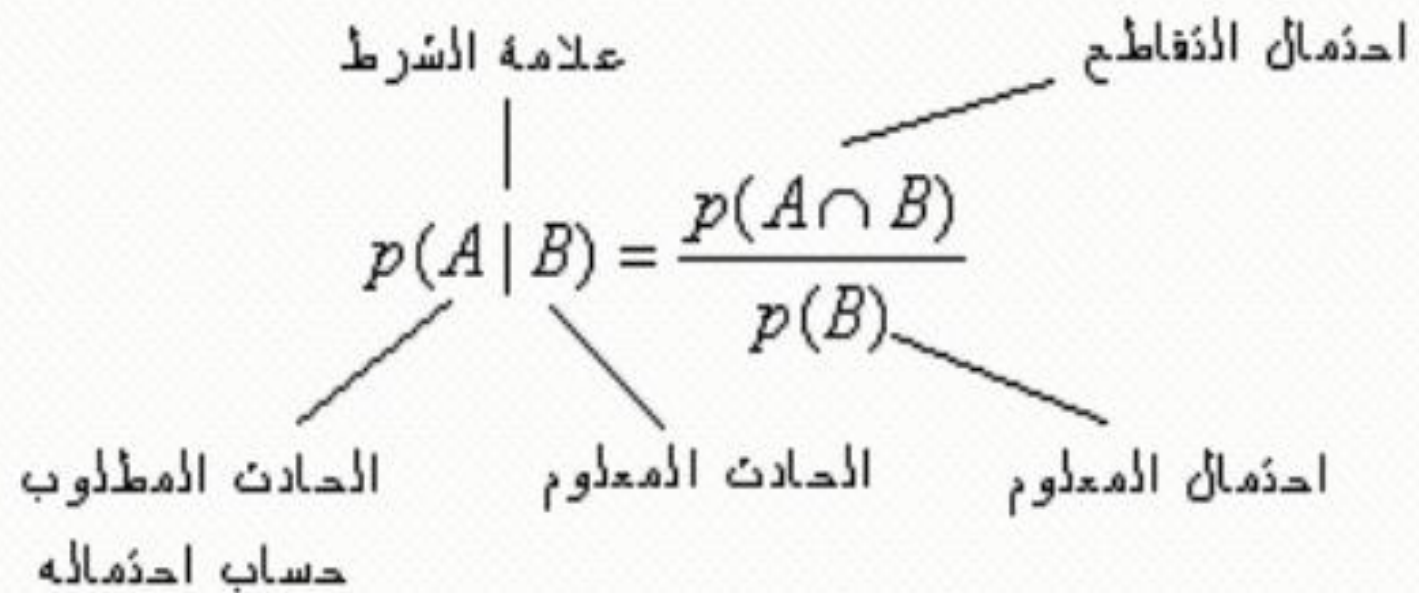
يستند هذا الاحتمال على فرصة وقوع حادث، إذا توافرت معلومات عن وقوع حادث آخر له علاقة بالحادث الأول، كاحتمال نجاح الطالب في مادة الإحصاء إذا علم أنه من الناجحين في مادة الاقتصاد، وكاحتمال استخدام المزرعة لنوع معين من السماد، إذا علم أنه يقوم بزراعة محصول معين، وكاحتمال أن الخريجي يعمل بالقطاع الخاص، إذا علم أنه ممن تخرجوا من قسم معين من أقسام كلية الزراعة، والأمثلة على ذلك كثيرة.

فإذا كان الحادث B حادث معلوم، والحادث A حادث آخر يراد حساب احتمال وقوعه، بمعلومية الحادث B، فإن هذا الاحتمال يحسب بتطبيق المعادلة التالية:

$$p(A | B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

ويعرف الاحتمال $p(A | B)$ بقانون الاحتمال الشرطي، ويقرأ "احتمال وقوع الحادث A بمعلومية الحادث B"، أو يقرأ "احتمال وقوع الحادث A بشرط وقوع الحادث B"، كما يمكن حساب احتمال وقوع الحادث B بمعلومية الحادث A، وذلك بتطبيق المعادلة التالية:

$$p(B | A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$



The diagram illustrates the formula for conditional probability, $p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$, with labels in Arabic. The label 'علامة الشرط' (Conditional symbol) points to the vertical bar in the denominator. The label 'احتمال التقاطع' (Intersection probability) points to the numerator $p(A \cap B)$. The label 'احتمال المعلوم' (Known probability) points to the denominator $p(B)$. The label 'الحادث المطلوب حساب احتماله' (Event whose probability is to be calculated) points to $p(A)$. The label 'الحادث المعلوم' (Known event) points to B .

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

علامة الشرط

احتمال التقاطع

احتمال المعلوم

الحادث المطلوب حساب احتماله

الحادث المعلوم

مثال

فيما يلي توزيع تكراري لعينة عشوائية حجمها 100 من خريجي الكلية في العامين الماضيين، حسب التخصص، ونوع المهنة:

المهنة / التخصص	عمل حكومي	قطاع خاص	عمل حر	Sum
اقتصاد زراعي	15	5	10	30
علوم أغذية	8	17	10	35
علوم تربة	12	10	13	35
Sum	35	32	33	100

فإذا اختير أحد الخريجين بطريقة عشوائية، احسب الاحتمالات التالية:

- 1- ما احتمال أن يكون من خريجي قسم الاقتصاد و يعمل بالقطاع الخاص.
- 2- ما احتمال أن يكون ممن يعملون بالحكومة أو من خريجي قسم علوم الأغذية.
- 3- ما احتمال أن يكون من خريجي قسم علوم الأغذية أو من قسم علوم التربة.
- 4- إذا علم أن الفرد من خريجي قسم علوم الأغذية، ما احتمال أن يكون ممن يعملون عملاً حراً.

الحل:

أولاً: نرمز لنوع المهنة بالرموز A ، ولنوع التخصص بالرموز B ، كما هو مبين بالجدول التالي:

المهنة التخصص		عمل حكومي	قطاع خاص	عمل حر	Sum
		A_1	A_2	A_3	
اقتصاد زراعي	B_1	15	5	10	30
علوم أغذية	B_2	8	17	10	35
علوم تربة	B_3	12	10	13	35
Sum		35	32	33	100

ثانياً: التكرار في كل خلية يعبر عن عدد الخريجين الذين ينتمون لقسم معين و يعملون في مهنة معينة، أي يعبر عن عدد تكرارات حوادث التقاطع الممكنة $A \cap B$.

1- حساب احتمال أن يكون من خريجي قسم الاقتصاد و يعمل بالقطاع الخاص.

$$P(B_1 \cap A_2) = \frac{f(B_1 \cap A_2)}{n} = \frac{5}{100} = 0.05$$

2- حساب احتمال أن يكون ممن يعملون بالحكومة أو من خريجي قسم علوم الأغذية.

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup B_2) &= p(A_1) + P(B_2) - P(A_1 \cap B_2) \\ &= \frac{35}{100} + \frac{35}{100} - \frac{8}{100} = \frac{62}{100} = 0.62 \end{aligned}$$

3- حساب احتمال أن يكون من خريجي قسم علوم الأغذية أو من قسم علوم التربة.

هذان حادثان متنافيان، لأن تخرج الفرد من أحد الأقسام ينفي تخرجه من الأقسام الأخرى، وبمعنى آخر استحالة أن الفرد تخرج من قسمين في آن واحد، لذا يكون احتمال اتحادهما هو:

$$\begin{aligned} P(B_2 \cup B_3) &= p(B_2) + P(B_3) \\ &= \frac{35}{100} + \frac{35}{100} = \frac{70}{100} = 0.70 \end{aligned}$$

4- إذا علم أن الفرد من خريجي قسم علوم الأغذية، ما احتمال أن يكون ممن يعملون عملا حرا،
هذا احتمال شرطي، المطلوب هنا " حساب احتمال أن الفرد ممن يعملون عملا حرا A_3 بشرط
أنه من خريجي قسم علوم الأغذية B_2 ، أي أن الاحتمال المطلوب هو:

$$p(A_3 | B_2) = \frac{p(A_3 \cap B_2)}{p(B_2)} = \frac{\left(\frac{10}{100}\right)}{\left(\frac{35}{100}\right)} = \frac{10}{35}$$

• قانون ضرب الاحتمالات Probability Multiplying Law

ويعكس هذا القانون احتمال وقوع الأحداث معا، أي احتمال التقاطعات، فإذا كان A , B ،
حادثان يمكن وقوعهما معا، فإن الاحتمال $P(A \cap B)$ يمكن حسابه كحاصل ضرب احتماليين، هما:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(B) P(A|B) \\ \text{or} \\ P(A \cap B) &= P(A) P(B|A) \end{aligned}$$

مثال

إذا كانت نسبة مزارع الخضروات التي تستخدم أسلوب معين للتسميد 60%، وإذا كان نسبة المبيعات من إنتاج الخضروات المسمدة 70%، بينما نسبة المبيعات من الخضروات غير المسمدة 80%، إذا اختيرت أحد المزارع التي تنتج الخضروات عشوائيا ، فأوجد الآتي:

- 1- ما احتمال أن هذه المزرعة تستخدم أسلوب التسميد؟
- 2- إذا علم أن هذه المزرعة تستخدم أسلوب التسميد، ما احتمال أن تباع إنتاجها؟
- 3- ما احتمال أن هذه المزرعة تستخدم أسلوب التسميد وتبيع إنتاجها؟
- 4- ما احتمال أن هذه المزرعة ممن لا يستخدمون أسلوب التسميد و تباع إنتاجها؟

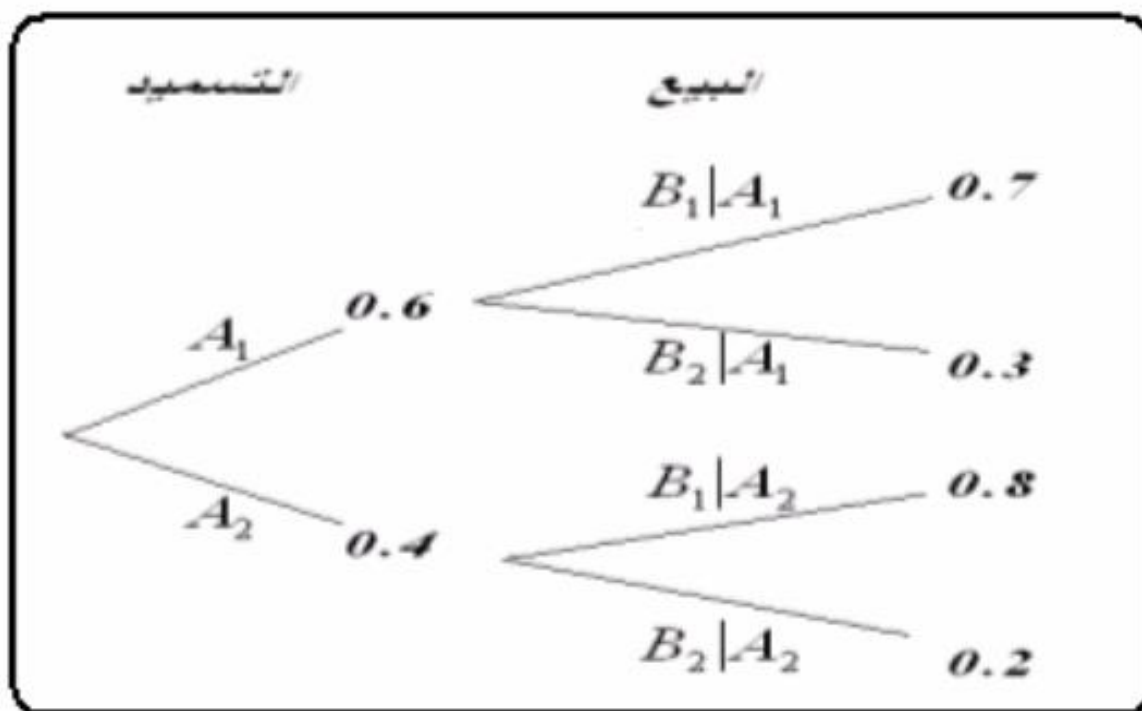
الحل

إذا فحصنا حال المزرعة المسحوبة، نجد أننا نتعامل مع نتيجتين متعاقتين هما:

النتيجة الأولى ولها حالتان: { المزرعة تستخدم طريقة التسميد (A_1) أو المزرعة لا تستخدم (A_2) }

النتيجة الثانية ولها حالتان: { المزرعة تباع الإنتاج (B_1)، أو المزرعة لا تباع الإنتاج (B_2) }

لذا يمكن استنتاج شجرة الاحتمالات للحصول على النتائج الكلية كالتالي:



وفيما يلي حساب الاحتمالات:

1- احتمال أن المزرعة تستخدم أسلوب التسميد هو:

$$P(A_1) = 0.6$$

2- إذا علم أن هذه المزرعة تستخدم أسلوب التسميد، فإن احتمال أن تباع إنتاجها هو:

$$P(B_1|A_1) = 0.7$$

3- احتمال أن هذه المزرعة تستخدم أسلوب التسميد وتبيع إنتاجها عبارة عن احتمال وقوع حادثان

معاً $(B_1 \text{ and } A_1)$ ، لذا يحسب هذا الاحتمال بتطبيق المعادلة (7-8) كما يلي:

$$P(A_1 \cap B_1) = P(A_1) P(B_1|A_1)$$

$$= (0.6)(0.7) = 0.42$$

4- احتمال أن المزرعة لا تستخدم أسلوب التسميد وتبيع إنتاجها هو:

$$P(A_2 \cap B_1) = P(A_2) P(B_1|A_2)$$

$$= (0.4)(0.8) = 0.32$$

• الأحداث المستقلة Independent Events

إذا كانت الحادثنان A , B يمكن وقوعهما معا، ولكن وقوع أحدهما ليس له علاقة بوقوع أو عدم وقوع الحادث الآخر، فإن الاحتمال $P(A \cap B)$ يمكن التعبير عنه كالتالي:

$$P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

وفي هذه الحالة يقال أن الحادثنان A , B مستقلتان.

مثال

إذا كان نسبة المزارع التي تنتج خضروات 60% ، ونسبة المزارع التي تنتج فاكهة 75% ، ونسبة المزارع التي تنتج الخضروات و الفاكهة 50% ، أوجد الآتي:

- 1- ما احتمال أن مزرعة ما تنتج فاكهة أو خضروات؟
- 2- ما احتمال ألا تنتج المزرعة الفاكهة ؟
- 3- هل انتاج المزرعة للفاكهة مستقل عن إنتاجها للخضروات؟

الحل:

بفرض أن A حادث يعبر عن "المزرعة تنتج خضروات" ، B هو حادث يعبر عن " المزرعة تنتج فاكهة" ، فإن:

$$P(A) = 0.6 \text{ , } P(B) = 0.75 \text{ , } P(A \cap B) = 0.5$$

ويكون:

1- احتمال أن مزرعة ما تنتج فاكهة أو خضروات هو:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= (0.6) + (0.75) - 0.5 = 0.85 \end{aligned}$$

2- احتمال ألا تنتج المزرعة الفاكهة هو:

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.75 = 0.25$$

3- لمعرفة ما إذا كان إنتاج المزرعة للفاكهة مستقل عن إنتاجها للخضروات

$$P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

$$P(A \cap B) = 0.5, \quad P(A) P(B) = (0.6)(0.75) = 0.45$$

وحيث أن : $P(A \cap B) \neq P(A) P(B)$ ، فإن إنتاج المزرعة للفاكهة (A) ، غير مستقل عن إنتاجها للخضروات (B) .

مثال

إذا كان الحادثان A , B حادثان مستقلان ، وكان $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.5$ ، فأوجد الاحتمال $P(A \cup B)$.

الحل:

بما أن الحادثان A , B مستقلان، إذا:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) P(B) \\ &= (0.6)(0.5) = 0.3 \end{aligned}$$

ويكون احتمال $P(A \cup B)$ هو:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0.6 + 0.5 - 0.3 = 0.8 \end{aligned}$$